



Fascicule ADEM
Géométrie : Vecteurs

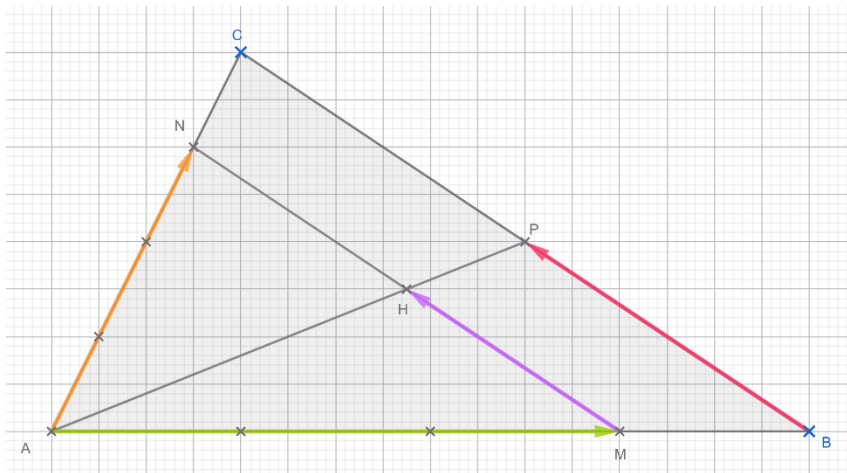
Classe : 3^{ème} Page : 52
Exercice : 10

Enoncé :

Soit ABC un triangle.

- 1.a. Construis les points M et N tels que $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ et $\vec{AN} = \frac{3}{4}\vec{AC}$
- 1.b. Démontre que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
- 2.a. Construis les points H et P tel que $\vec{MH} = \frac{1}{2}\vec{MN}$ et $\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.
- 2.b. Démontre que les points A, H et P sont alignés

Correction :



1.b. Démontrons que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. (L'objectif est d'avoir à la fin une relation entre les vecteurs \vec{MN} et \vec{BC})

$\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ on applique la relation de Chasles pour insérer les points N et C dans les vecteurs \vec{AM} et \vec{AB}

$(\vec{AN} + \vec{NM}) = \frac{3}{4}(\vec{AC} + \vec{CB})$ on développe le second membre en appliquant la distributivité

$\vec{AN} + \vec{NM} = \frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{CB}$ puis on remplace \vec{AN} par son expression $\frac{3}{4}\vec{AC}$

$\frac{3}{4}\vec{AC} + \vec{NM} = \frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{CB}$ on transpose $\frac{3}{4}\vec{AC}$ dans le second membre

$\vec{NM} = -\frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{CB}$ ensuite on réduit l'expression car les vecteurs opposés $-\frac{3}{4}\vec{AC}$ et $\frac{3}{4}\vec{AC}$ s'annulent

$\vec{NM} = \frac{3}{4}\vec{CB}$ donc les vecteurs \vec{NM} et \vec{CB} sont colinéaires D'où les droites (NM) et (CB) sont parallèles

$\vec{MN} = \frac{3}{4}\vec{BC}$



2.b. Démontrez que les points A, H et P sont alignés

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}; \quad \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AH} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$$

$$-\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AH} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right)$$

$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AP})$ d'où les points A, H et P sont alignés

